Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités indiquées sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Conformité et durée de vie de tubes fluorescents, conformité de rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsga.fr/assets/annales/bts-ga/E2 - Mathématiques/2022/BTS GA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1 -Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est étudiée à partir d'une équation différentielle puis d'une fonction exponentielle. Les questions portent sur les variations, l'arrêt éventuel, la distance parcourue, le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

La formule donnée pour l'équation homogène $y' + ay = 0$ est $y(t) = ke^{-at}$, avec k constante réelle. Ici, $a = 0,8$. En remplaçant le coefficient, on obtient l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **La fonction g est définie par g(t) = 5. Vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette valeur est égale au second membre de l'équation différentielle : g en est bien une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation avec second membre 4. Toutes les solutions s'obtiennent en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0,8t}$. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la solution recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel disparaît à la limite et il ne reste que la constante 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La courbe d'une fonction qui tend vers un réel L lorsque $t \to +\infty$ admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite de $f(t)$ est 5. On en déduit directement l'équation de l'asymptote de la courbe C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale de C : $y = 5$.

Question 2. En admettant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t)$ tend vers 5 à l'infini. Le tableau de variation est donc :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	−	
$f(t)$	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne peut donc pas s'annuler. Même si elle décroît et se rapproche de 5 lorsque le temps augmente, le modèle ne prévoit pas l'arrêt du chariot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à 5 $m \cdot s^{-1}$ et ne s'annule jamais.

Question 4.a. **La fonction F est définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier qu'elle est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme donne $-18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$, et le second donne 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. **La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f sur cet intervalle. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation numérique donne environ $15,3251$ m, soit $15,33$ m à un centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ $m \approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité à l'ordre 2 affiché par le logiciel a pour partie régulière $20 - 12t + 24/5\ t^2$. La forme correcte du reste est $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions de l'énoncé, il faut donc retenir celle qui comporte ce reste.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$20 - 12t + 24/5\ t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$. Avec $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, on obtient $f'(0) = -12$. La tangente passe donc par le point de coordonnées $(0 ; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Conformité et durée de vie de tubes fluorescents, conformité de rivets

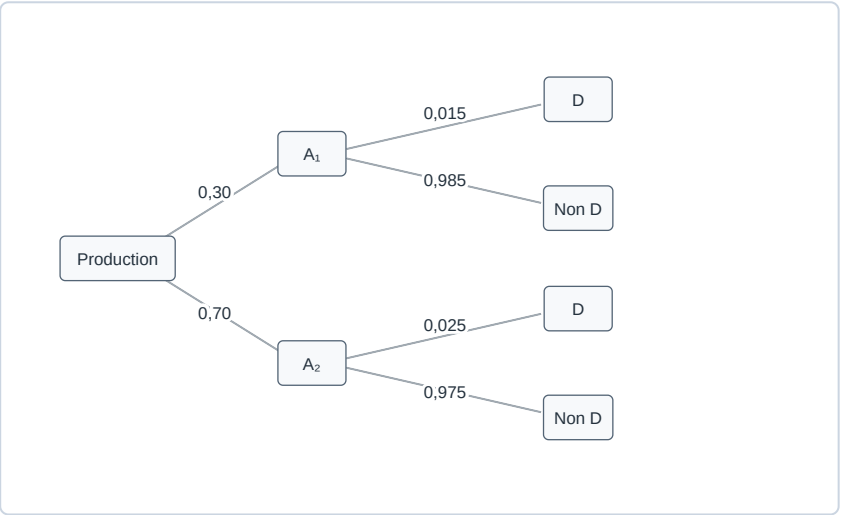
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, et les données de défaut permettent de traiter des probabilités conditionnelles. L'exercice étudie aussi la durée de fonctionnement des tubes par une loi exponentielle, puis estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et la présence ou l'absence de défaut des tubes.

Les premières branches indiquent la part de production de chaque atelier. Les branches suivantes donnent, pour chaque atelier, les probabilités conditionnelles d'un défaut et de l'absence de défaut.

Production et défauts des tubes



Les probabilités des branches du second niveau sont conditionnelles à l'atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré complété ci-dessous.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

On multiplie la probabilité de provenance de l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier :
$P(A_1 \cap D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045.$

Question 3. **Montrer que P(D) = 0,0195, valeur indiquée dans le sujet.**

Probabilités totales : les deux ateliers peuvent produire un tube défectueux.
$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$.

La valeur 0,0195 imprimée est incohérente avec les données ; le sujet porte également la correction manuscrite 0,0220.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on divise la probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut par la probabilité d'être sans défaut :

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,70 \times 0,975}{1 - 0,022} = \frac{0,6825}{0,978} \approx 0,698.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer l'espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle, $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Donc $E(T) = \frac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures : c'est la durée moyenne de bon fonctionnement dans le modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La loi étant continue, $P(T < 8000) = 1 - e^{-0,0001 \times 8000} = 1 - e^{-0,8} \approx 0,55067$, soit 0,55 au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8000) \approx 0,55$.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser t est le complément de la fonction de répartition :

$$P(T > 10000) = e^{-0,0001 \times 10000} = e^{-1} \approx 0,36788.$$

Au centième, cela donne 0,37.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.

La fréquence des rivets conformes dans l'échantillon est $f = \frac{975}{1000} = 0,975$. Elle fournit l'estimation ponctuelle de la proportion inconnue.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p, centré sur la fréquence observée et au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Avec $f = 0,975$ et $n = 1000$, la marge vaut $1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1000}} \approx 0,009677$.

1. $0,975 - 0,009677 \approx 0,965323$
2. $0,975 + 0,009677 \approx 0,984677$

On arrondit les deux bornes au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures et de coefficient 2 ou 3 selon la spécialité. Elle comprend deux exercices de 10 points : le freinage d'un chariot modélisé par une fonction exponentielle, puis la conformité et la durée de vie de produits industriels. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, probabilités et estimation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière s'ajoute pour résoudre l'équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers L à l'infini, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % donné pour une proportion est [f - 1,96√(f(1-f)/n) ; f + 1,96√(f(1-f)/n)].

Points de vigilance & attentes du jury

- Garder les unités cohérentes : vitesse en m/s, temps en secondes et distance intégrée en mètres.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, vérifier si sa vitesse atteint zéro, et pas seulement si elle diminue.
- Dans un arbre pondéré, distinguer les probabilités des ateliers des probabilités conditionnelles de défaut.
- Vérifier la cohérence des données de probabilité : les taux imprimés en partie A semblent donner P(D) = 0,022, alors que le sujet indique 0,0195.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la fonction vitesse ?

La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré. Si F est une primitive de f, elle vaut $F(t_1) - F(t_0)$. Exprimez le résultat en mètres et appliquez l'arrondi demandé.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube sans défaut provienne de l'atelier 2 ?

Il faut calculer la probabilité de l'intersection entre « atelier 2 » et « sans défaut », puis la diviser par la probabilité de « sans défaut ». Cette démarche applique la formule d'une probabilité conditionnelle.

Q : Comment répartir le temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et chaque exercice vaut 10 points. Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment : avancez sur les questions accessibles, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Que faire si les données semblent incompatibles avec une valeur demandée ?

Présentez le calcul à partir des données imprimées et signalez clairement l'écart avec la valeur demandée. Ici, les taux des deux ateliers conduisent à une probabilité totale de défaut différente du 0,0195 indiqué dans l'énoncé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsga.fr/assets/annales/bts-ga/E2 - Mathématiques/2022/BTS GA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Géologie Appliquée : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.