Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Étude d'un système électrique par transformée de Laplace** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsga.fr/assets/annales/bts-ga/E2 - Mathématiques/2022/BTS GA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2 -Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est freiné et sa vitesse f(t) est étudiée sur [0 ; +∞[. Les questions portent sur une équation différentielle, les variations et la limite de la vitesse, la distance parcourue, le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0 sur [0 ; +∞[.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$, donc $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.
2. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Elle vérifie donc l'équation (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

> Les solutions de (E) sont les sommes d'une solution particulière, ici $g(t) = 5$, et des solutions de l'équation homogène associée.

Ainsi, $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, où $k \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$.
2. La condition $f(0) = 20$ donne $k + 5 = 20$, donc $k = 15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Quand $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ tend vers 5 .

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente une équation de l'asymptote à la courbe représentative C de f.

> La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f décroît de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout instant fini $t \geq 0$, on a $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais et tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$.

- Le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ sans atteindre zéro.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. **La distance parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est $d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Au centimètre près, cela donne $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir et recopier, sans justification, l'expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les propositions données.**

La partie régulière affichée est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le reste d'un développement limité à l'ordre 2 s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Comme $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12$, on obtient l'équation demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d'un système électrique par transformée de Laplace

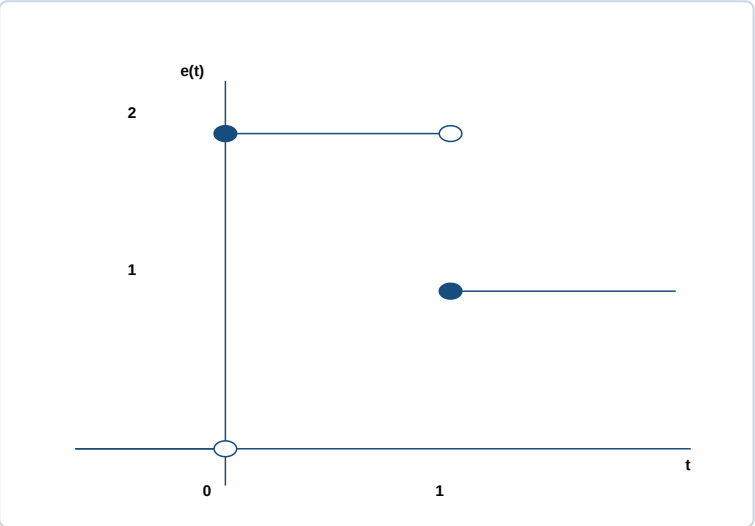
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). À l'aide du formulaire de Laplace, il faut déterminer et représenter le signal d'entrée et le signal de sortie s(t).

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme $U(t) = 0$ pour $t < 0$ et $U(t) = 1$ pour $t \geq 0$, le signal est nul avant 0. Il passe à 2 en $t = 0$, puis à 1 en $t = 1$, où le second échelon est soustrait. Les valeurs aux deux instants sont donc celles du palier qui commence : $e(0) = 2$ et $e(1) = 1$. Le schéma indique les points ouverts et fermés.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité, on transforme séparément chaque échelon. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-a)\} = e^{-ap}/p$. Le retard du second échelon est $a = 1$. En appliquant les coefficients de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, on obtient la transformée demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − (1/[p(p + 1)])e⁻ᵖ.

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. Avec $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on multiplie les deux expressions puis on sépare les deux termes du numérateur. On retrouve ainsi l'expression demandée, avec le facteur e^{-p} associé au retard d'une unité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

En mettant les fractions au même dénominateur, le membre de droite devient $\frac{(p+1) - p}{p(p+1)}$. Le numérateur se réduit à 1, ce qui donne bien la fraction du membre de gauche. Cette décomposition permet ensuite d'utiliser directement les transformées inverses du formulaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Le formulaire donne les deux premières transformées directement. Pour les deux suivantes, on applique le retard d'une unité : e^{-p} multiplie la transformée par le facteur de retard et décale la fonction d'une unité. Ainsi, les fonctions retardées restent nulles avant $t = 1$.

Expression	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$, dans l'ordre demandé.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition précédente donne pour le premier terme l'inverse $2[U(t) - e^{-t}U(t)]$. Le second terme est retardé d'une unité et comporte donc $U(t-1)$: il est nul sur $[0;1[$. Sur cet intervalle, $U(t) = 1$, d'où l'expression de sortie demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

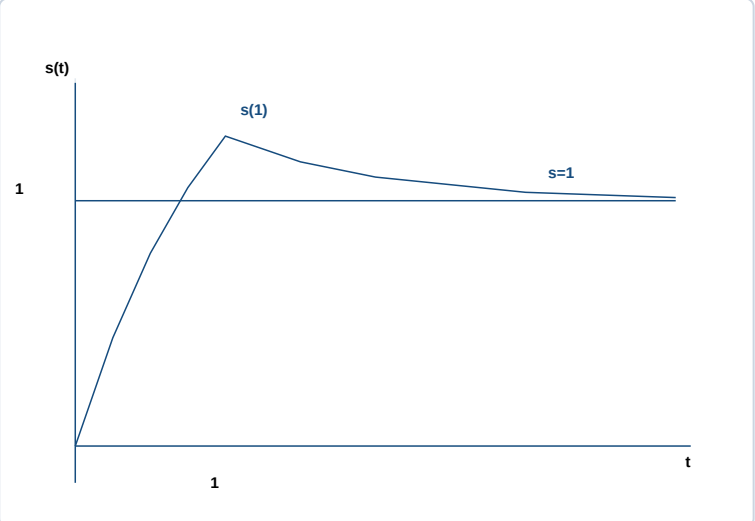
En évaluant l'expression à $t = 1$, on obtient $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e\,e^{-1} = 1$, cela se simplifie en $2 - 2/e$. La valeur numérique est environ $1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$: comme $e - 2 > 0$, elle décroît vers 1. Les deux expressions coïncident en $t = 1$. Le visuel conserve ces allures et l'asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme contenant l'exponentielle tend donc vers 0 et il reste le terme constant 1. C'est aussi la valeur de l'asymptote horizontale de la courbe.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. L'exercice 1 étudie le freinage d'un chariot ; l'exercice 2 porte sur un système électrique. Les compétences évaluées comprennent équations différentielles, analyse de fonction, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation linéaire $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- Un retard d'une unité correspond au facteur e^{-p} : $\mathcal{L}\{f(t-1)U(t-1)\} = F(p)e^{-p}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la solution générale de l'équation différentielle.
- Ne pas confondre une vitesse qui tend vers une limite positive avec un arrêt du chariot.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux bornes dans l'ordre demandé et respecter l'arrondi au centimètre.
- Dans les calculs de Laplace, appliquer le facteur de retard uniquement aux termes concernés et respecter les intervalles de définition.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

On intègre la fonction vitesse sur l'intervalle considéré. Si F est une primitive de f, la distance entre t_0 et t_1 vaut $F(t_1) - F(t_0)$. On effectue ensuite l'arrondi demandé, ici au centimètre.

Q : Comment interpréter la limite de la vitesse dans cette étude ?

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ décrit la vitesse vers laquelle le modèle tend à long terme. Ici, elle est positive : la vitesse ne tend donc pas vers zéro et le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, soit un total de 20 points. Répartissez le temps entre les deux, gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et n'oubliez pas le document-réponse demandé pour les tracés.

Q : Quels sont les critères de notation et les coefficients indiqués ?

Le sujet attribue 10 points à chacun des deux exercices. Il indique un coefficient de 1,5 pour la spécialité Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 pour la spécialité Électrotechnique.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsga.fr/assets/annales/bts-ga/E2 - Mathématiques/2022/BTS GA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Géologie Appliquée : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.