Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Approvisionnement, pannes et qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsga.fr/assets/annales/bts-ga/E2 - Mathématiques/2022/BTS GA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3 -Sujet.pdf

1. Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, le nombre de personnes équipées d'un implant médical est étudié à partir de données annuelles depuis 2013. Deux modèles sont examinés : un ajustement exponentiel linéarisé et un modèle reposant sur une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

On calcule $y_i = \ln(N_i - 30)$, avec N_i en milliers. Par exemple, pour 2013 : $\ln(56{,}25 - 30) \approx 3{,}268$. Les valeurs arrondies au millième sont :

Rang k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points Mᵢ(kᵢ ; yᵢ), sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$, avec $y_i = \ln(N_i - 30)$, donne une pente d'environ $0{,}079$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3{,}261$. On arrondit les deux coefficients séparément au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0{,}08k + 3{,}26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

De $y = \ln(N - 30)$, on déduit $N = 30 + e^y$. En substituant $y = 0{,}08k + 3{,}26$, on obtient $N(k) = 30 + e^{3{,}26}e^{0{,}08k}$, avec $e^{3{,}26} \approx 26{,}05$. N est exprimé en milliers.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes qui devraient être équipées de l'implant en 2026.**

En 2026, $k = 2026 - 2013 = 13$. Ainsi, $N(13) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08\times 13} \approx 103{,}701$ milliers. L'arrondi au millier près donne 104 milliers de personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026, environ 104 000 personnes seront équipées.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, dire si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Lorsque $k \to +\infty$, $e^{0{,}08k} \to +\infty$. Le modèle prévoit donc un nombre de personnes équipées sans limite, alors que la population est stable à 60 millions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle finit par prévoir plus de 60 millions de personnes équipées.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.**

On réécrit l'équation sous la forme $y' = -0{,}05y$. La solution générale est une exponentielle de taux $-0{,}05$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y(t) = c$, on a $y' = 0$. L'équation donne $0{,}05c = 0{,}05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

La solution générale est la somme de la solution constante particulière 1 et de la solution générale de l'équation homogène.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **En utilisant la condition g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

La condition initiale donne $g(0) = 1 + C = 8$, donc $C = 7$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient l'expression de g.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 1 + 7e^{-0{,}05t}$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années écoulées depuis 2013 et f(t) le nombre de personnes équipées en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.**

Pour 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Alors $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0{,}05 \times 13}} \approx 96{,}685$ milliers. Au millier près, cela donne 97 milliers de personnes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

En 2026, environ 97 000 personnes seront équipées.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}05t} \to 0$. Le dénominateur de $f(t)$ tend vers 1, donc $f(t) \to 450$. Puisque f est exprimée en milliers, le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

Question 4. **À partir de l'expression de f'(t) fournie par le logiciel de calcul formel, déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}05t} > 0$. Dans $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1 + 7e^{-0{,}05t})^2}$, le dénominateur est aussi strictement positif : ainsi $f'(t) > 0$. Le nombre de personnes équipées augmente selon ce modèle.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$: le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers. Expliquer la méthode employée.

Résoudre $f(t) > 120$ revient à résoudre $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, soit $t > -20\ln\left(\dfrac{11}{28}\right) \approx 18{,}686$. Le premier rang annuel entier qui convient est donc $t = 19$, correspondant à l'année $2013 + 19 = 2032$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Le seuil de 120 000 personnes sera dépassé à partir de 2032.

2. Approvisionnement, pannes et qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau délivré.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Les événements A et B, correspondant respectivement à l'absence de bouteilles dans la file d'entrée et à l'absence d'eau dans le réservoir au moins une fois dans la journée, sont indépendants avec P(A) = 0,03 et P(B) = 0,02. Associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite en inscrivant les numéros et les lettres, sans justification.

Les correspondances sont : 1 avec E, car la probabilité du complémentaire de A vaut 0,97 ; 2 avec C, soit $A \cap \overline{B}$; 3 avec F, de probabilité 0,0006 ; 4 avec D, de probabilité 0,0494.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes sur 200 jours

Question 1. La probabilité que la machine tombe en panne un jour quelconque est 0,025, et les pannes de jours différents sont indépendantes. Donner, sans justification, la loi de probabilité suivie par X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque jour constitue une épreuve de probabilité de panne 0,025, indépendante des autres. Le nombre de jours de panne sur 200 jours suit donc une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025 :

$P(X = k) = \binom{200}{k}(0,025)^k(0,975)^{200-k}$, pour $k = 0, 1, \ldots, 200$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0,025)$.

Partie B - Approximation par une loi de Poisson

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

Pour approcher une loi binomiale de paramètres n et p par une loi de Poisson, on choisit le paramètre $\lambda = np$. Ici, $n = 200$ et $p = 0,025$, donc $\lambda = 200 \times 0,025 = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités de 0 à 10 :

$$P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} e^{-5}\frac{5^k}{k!} \approx 0,9863047.$$

Au millième près, la probabilité demandée est 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0,986.$

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour P(Y = k), déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

Avec la formule donnée, pour $k = 15$, $P(Y = 15) = \frac{5^{15}e^{-5}}{1\times2\times\cdots\times15}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : cette probabilité n'est donc pas nulle. Elle est simplement très petite et peu visible sur le graphique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0,000157 > 0.$

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **Dans l'échantillon de 100 bouteilles, les effectifs correspondant aux volumes de 73, 74, 75, 76 et 77 cL sont respectivement 17, 20, 43, 13 et 7. Déterminer à l'aide de la calculatrice la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

Volume (cL)	73	74	75	76	77
Effectif	17	20	43	13	7

La moyenne pondérée vaut $\bar{x} = 7473/100 = 74,73$ cL. L'écart type est $\sigma = \sqrt{558579/100 - 74,73^2} \approx 1,103$ cL, soit 1,10 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{x} = 74,73$ cL ; $\sigma \approx 1,10$ cL.

Partie C - Test bilatéral

Question 2.a. Pour le test bilatéral au seuil de confiance de 95 % de H_0 : m = 75 contre H_1 : m ≠ 75, déterminer à 10^{-2} près un nombre h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) ≈ 0,95, sachant que sous H_0, Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11.

Sous H_0, l'intervalle central de probabilité 0,95 d'une loi normale est délimité par la moyenne plus ou moins environ 1,96 écarts types. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,11 = 0,2156$, soit $h = 0,22$ cL au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

On compare la moyenne observée $\bar{x}$ à l'intervalle d'acceptation centré sur 75, obtenu avec $h \approx 0,22$ cL.

- Si $74,78 \leq \bar{x} \leq 75,22$, on ne rejette pas H_0.
- Sinon, on rejette H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $\bar{x} \in [74,78\,;\,75,22]$; sinon, rejeter H_0.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon donné, décider si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée.

La moyenne de l'échantillon est $\bar{x} = 74,73$ cL. Elle est inférieure à la borne basse de l'intervalle d'acceptation, $74,78$ cL. La moyenne observée se situe donc hors de l'intervalle : au seuil de 5 %, les résultats conduisent à rejeter l'hypothèse H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 : la machine n'est pas considérée comme correctement réglée au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, dure 2 heures et son coefficient varie selon la spécialité. Elle comporte deux exercices : la modélisation de l'équipement en implants médicaux et l'étude d'une machine à embouteiller. Les compétences évaluées couvrent ajustement, équations différentielles, probabilités, lois discrètes, statistique descriptive et test bilatéral.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement y = ln(N - 30) transforme le modèle exponentiel en relation affine, utilisable pour un ajustement linéaire.
- La solution générale de y' + ay = b associe une solution particulière constante à la solution générale de l'équation homogène.
- Pour n essais de Bernoulli indépendants de probabilité p, le nombre de succès suit B(n,p) et son approximation de Poisson a pour paramètre λ = np.
- Pour un test bilatéral normal à 95 %, la zone centrale sous H_0 est définie par une probabilité de 0,95 autour de la moyenne hypothétique.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : le nombre de personnes est exprimé en milliers et le temps est compté depuis 2013.
- Pour l'approximation de Poisson, calculer λ = np et distinguer une probabilité très petite d'une probabilité exactement nulle.
- Pour les événements indépendants, utiliser les complémentaires et les produits de probabilités en fonction de la situation décrite.
- Pour le test, comparer la moyenne observée à la zone de décision sous H_0 et conclure dans le contexte du réglage.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer du modèle linéarisé au modèle exponentiel du nombre de personnes équipées ?

Avec y = ln(N - 30), une droite y = ak + b donne N - 30 = e^(ak+b). On obtient donc N(k) = 30 + e^b e^(ak), en respectant les unités utilisées pour les données.

Q : Pourquoi la probabilité qu'une variable de Poisson vaille 15 n'est-elle pas nulle ?

Pour un paramètre λ positif, P(Y = k) = e^(-λ)λ^k/k! est strictement positive pour tout entier k supérieur ou égal à 0. Le graphique peut seulement rendre cette probabilité trop petite pour être visible.

Q : Comment organiser le temps et les calculs dans cette épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties sont indiquées comme indépendantes. Repérez les calculs à la calculatrice, puis gardez du temps pour les justifications, les arrondis et les interprétations demandées.

Q : Que faut-il présenter pour une réponse complète au test de réglage de la machine ?

Il faut déterminer la zone centrale de probabilité 0,95 sous H_0, énoncer la règle de décision, puis comparer la moyenne de l'échantillon à cette zone. La conclusion doit préciser si les résultats permettent d'accepter H_0.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsga.fr/assets/annales/bts-ga/E2 - Mathématiques/2022/BTS GA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Géologie Appliquée : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.